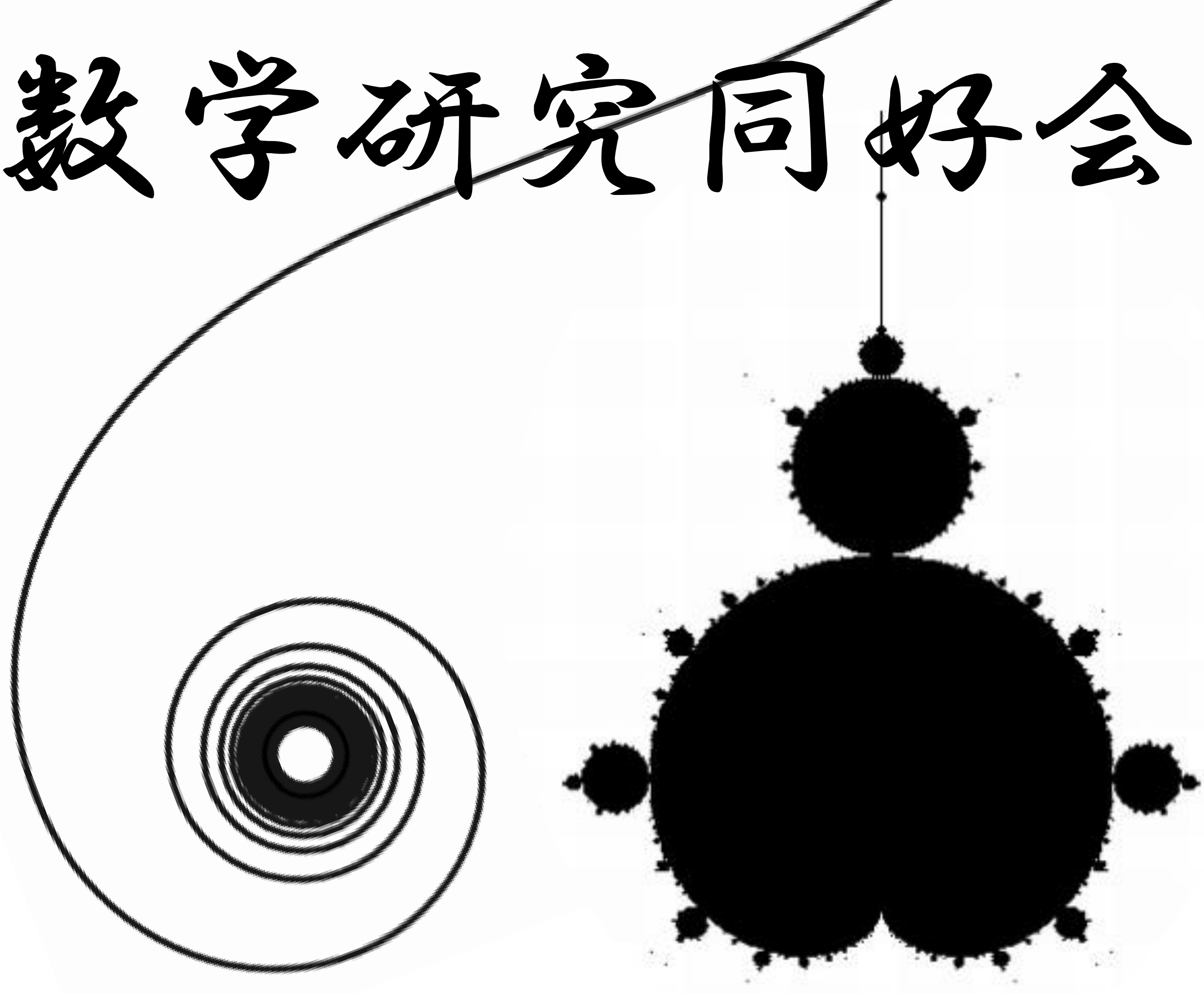
2022年度

会誌第7号

数学研究同好会



部員募集中！

特に中学生の部員を募集しています。
男子部員が多いですが、女子部員もいます。
男女問わず、気軽に見学に来てください！

【活動内容】

普段は先輩が後輩に中高数学、あるいは大学数学を教えたり、問題を一緒に解いたり、雑談で盛り上がったりしていることが多いです。

毎年、１月に行われる**数学オリンピック**(高校生向け)、**ジュニア数学オリンピック**(中学生向け)に参加しています。文化祭後は、数オリに向けて問題をみんなで解くことが多いです。ときどき OB の先輩も来てくださり、数オリの対策講義をしてくださったり、大学での勉強について教えてくださったりします。予選を突破し、本選へ行く部員も毎年数名いますよ！

今年は夏休みに**合宿**を行いました。関西へ行き、２日目、３日目には京都大学で先生の講義を受けました。観光の時間もたくさんあり、みんなとても楽しんでいました！

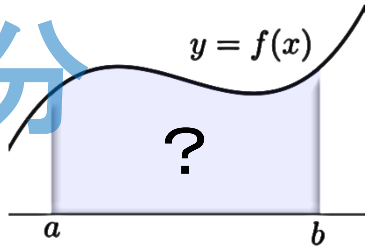
【活動日・活動場所】

毎週水・木・土、高３H 組(３号館２階、図書館の上です！)で活動。

数学を楽しもう！

どんなグラフの面積も計算できる方法とは？

積分



完全数（“perfect number”）って何？

$$6,\ 28,\ 496,\ 8128,\ \cdots$$

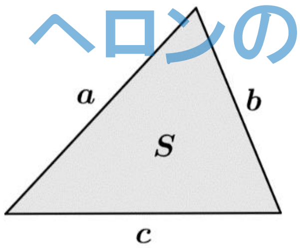
物体の運動を正確に予測できる方程式とは？

$$m\ddot{r}=F$$

0.9999…=1

３辺の長さから三角形の面積を計算！

ヘロンの公式



２乗したらマイナスになる数

$$i^2=-1$$

２乗したら０になる０以外の数

$$\varepsilon^2=0$$

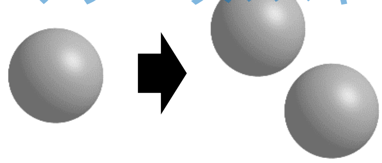
席替えで、同じ席になる人
がいる確率は？

最も美しいと言われる数式
「オイラーの等式」

$$e^{i\pi}+1=0$$

球を分割して組み直したら、
元の球と同じ体積の球が２つできる!?

バナッハ･タルスキーの定理



「素数は無限に存在」
証明できる？

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots$$

自然数の “個数” と
偶数の “個数” は等しい!?

バーゼル問題

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

はじめに

こんにちは。数学研究同好会、通称「すうけん」です。

今年で文化祭参戦７周年、部誌も第７号となります。今年度は久々の対面開催ということで、対面文化祭を経験したことがない部員が多く四苦八苦しましたが、楽しんでいただけていたら幸いです。

すうけんでは、数学好きたちが集まって講義や問題演習を行なったり、ボードゲームで遊んだりして自由に過ごしています。束縛されるのが苦手な皆さん、ぜひ入部しましょう！(？)
この部誌では、部員たちが各々興味のあるテーマの面白さなどを紹介します。今理解できなかったとしても数年後に見直してみてください。自身の成長を感じられるかもしれませんよ！

目次

数学の用語・記号について

部誌をより楽しむために必要最低限の知識をまとめました。

［自然数］ 1, 2, 3, 4, …

［整数］ … , −2, −1, 0, 1, 2, …

［有理数］ 二つの整数の比（分数）で表される数（分母は０でない整数）。

［無理数］ 二つの整数の比で表すことができない数。

［実数］ 有理数と無理数を総称して実数と呼ぶ。数直線上に表せる数。

［正（せい）の実数］ ０より大きい実数。

［負（ふ）の実数］ ０より小さい実数。

［絶対値］ ある実数xと０との数直線上の距離をｘの絶対値といい、$|x|$で表す。

例 $|2| = 2$、$|-2| = 2$

［定数］ 文字aが定数であるとは、aの値は変化しないものとして考えるということ。

［変数］ 文字xが変数であるとは、xの値は変化するものとして考えるということ。

変数がとりうる値を不等号で表すことがある。

例 $-1 \leq x \leq 1$ →変数xは－１以上１以下の範囲で変化する。

［関数］ ある２つの変数x, yがあり、xの値が１つ決まれば、必ずyの値もそれに応じて１つに決まるという関係があるとする。このとき、yはxの関数であるという。

例 円の半径が１つ決まればその円周も１つに決まる。

したがって、円周は半径の関数である。

［指数］ a^bをaのb乗といい、bを指数という。bが自然数のときは、a^bはaをb回掛け算した値である。

例：（３の４乗）$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$、指数は４

［～乗根］ $a^n = b$であるとき、aをbのn乗根という。例：９の２乗根は３と－３

［任意の～に対して］ 全ての～に対して、どの～に対しても、

第1章

数研、初の合宿！

高等部１年　＊＊＊＊＊＊

今年の夏休みは，数研史上初の合宿を行いました。合宿のテーマは「最先端で研究をされている数学者の方々の講義を受けよう」ということで，京都へ行き，京都大学の先生方を訪ねました。今回お会いしたのは，情報学研究科数理工学専攻の山川雄也先生，理学研究科数学・数理解析専攻の楠岡誠一郎先生と桑垣樹先生です。山川先生と楠岡先生は，それぞれ数研顧問の＊＊先生，＊＊先生と大学・大学院時代から交友関係があったそうです。そして桑垣先生は早実出身で，早実で教育実習をされていたときの指導教員が＊＊先生だったそうです。このようなご縁があったことから今回特別に講義をしてくださいました。本当にありがとうございました！

その他にも，今回の合宿では大阪，奈良，京都の多くの施設や観光名所を訪れました。以下で合宿中の出来事や，京大の先生方の講義から学んだことについて詳しく紹介します。

◆概要
日程：8/23～8/25（2 泊 3 日）
場所：大阪 → 奈良 → 京都
参加者：中等部 2 年 2 名，3 年 3 名，高等部 1 年 5 名，2 年 4 名，3 年 11 名
引率：＊＊先生，＊＊先生，OB 4 名

◆1 日目

いよいよスタートです。この 3 日間の計画は先生たちが「生徒のために！」と奔走してくださった結果，大変中身の濃いものになっています。（先生方，ありがとうございます。）

まずは東京駅で新幹線に乗車。行方がつかめない人がいて少しドタバタもしましたが，無事に全員集まり出発。抗原検査などに引っかかった部員もおらず，ほっとしながら乗車しました。

コロナ禍ということもあって，「久々に新幹線に乗った！」となった部員も少なくなく，その興奮冷めやらぬまま，大阪まであっという間の時間を過ごしました。

ちなみに，合宿のすぐ後に夏休み明け試験が控えていたため（なんと，最終日の翌日から新学期スタート！），その勉強に追われる部員もいました…。

無事に新大阪に着き，ここでお昼ご飯を食べました。制服姿の学生が大勢同じ店で食べていたのは，ほかの観光客の方からしたら驚かれたかもしれません。お店の方，大量の注文にこたえてくださり，ありがとうございました。回転率が悪くなってお店に迷惑をかけてはいけませんから，食べ終わった部員から速やかにお会計を済ませて退店。ごちそうさまでした。

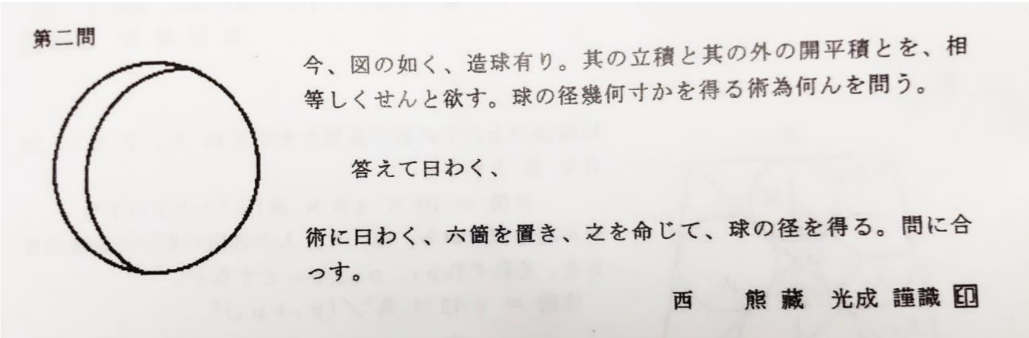
さあ，遂にメインイベントがはじまります。“すうけん”らしい内容が存分に盛り込まれたこの合宿。果たして，どんなことを経験してきたのか？少し期待しながら見ていただければと思います。

…それでは，次のページをご覧ください！

大阪天満宮で算額体験

江戸時代，日本では独自の数学である「和算」が盛んに研究され，額や絵馬に数学の問題やその解法を記した「算額」を神社や仏閣に奉納するという文化がありました。大阪天満宮にも多くの算額が奉納された記録が残っています。

その中に載っていた問題の中でおそらくもっとも簡単な問題がこちらです。



第二問

今、図の如く、造球有り。其の立積と其の外の開平積とを、相等しくせんと欲す。球の径幾何寸かを得る術為何んを問う。

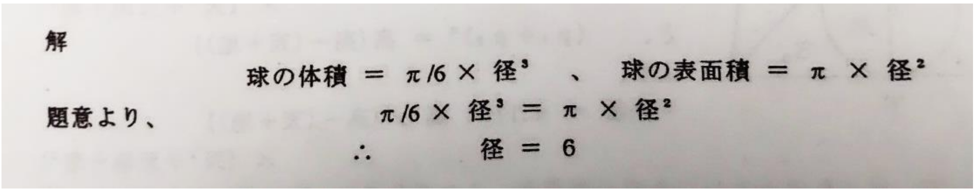
答えて日わく、

術に日わく、六箇を置き、之を命じて、球の径を得る。問に合っす。

西　熊蔵　光成　謹識 印

（現代語訳）　図のような球がある。その体積とその表面積が等しいとき，球の半径を求めよ。

解答↓



解

球の体積 ＝ π/6 × 径³　、　球の表面積 ＝ π × 径²

題意より、　π/6 × 径³ ＝ π × 径²

∴　径 ＝ 6

［出典］　近畿数学史学会(平成十年)．　大阪天満宮算額解説，2 ページ

◆2 日目

東大寺，春日大社を参拝

大阪から奈良へ移動し，午前中は東大寺と春日大社を観光しました。部員の一人が鹿せんべいを買っているときに鹿の群れが集まってきて，体を角で突き刺されたり服にかみつかれたりしていたのが大変そうでした。

特急「あをによし」で京都へ

「あをによし」という豪華な観光特急に乗って京都に向かいました。数研は鉄道ファンも多いので，あをによしを一番楽しみにしていた部員も多かったと思います。

堀川高校で交流会

堀川高校は京大や東大に多くの卒業生を輩出している高校です。総合的な探究の時間（「探究基礎」）にとても力を入れていて，3 年間かけて準備をするそうです。校舎から少し離れたところに本能学舎という探究活動用の施設もあります。（近くに本能寺跡石碑があります。）

はじめに，堀川高校の先生に校舎を案内していただきました。探究活動で使う実験室や自習室が充実していて，とても勉強しやすそうな環境でした。その後，別館の本能学舎に移動し，そこで堀川高校の生徒の皆さんと交流しました。探究活動で数学に関する研究をしている生徒さんがそれぞれの研究内容を発表してくれました。**整数値の角度の作図**についての研究，整数に関する研究，**ロシア・ウクライナの戦争の被害総額**の推定など様々な研究があり，とても刺激を受けました。

その後，数研からも数学の話題で発表をさせていただきました。（高 2 の＊＊さんが「Vieta Jumping(**ヴィエタ ジャンピング**)」という整数問題のテクニックについて発表しました。p.31 で＊＊さんが Vieta Jumping について解説しています。）

京都大学　山川雄也先生　講演会

山川先生にお会いし，京都大学工学部情報学科の紹介と，山川先生のご専門である**「数理最適化」**について話していただきました。

工学部情報学科では現実の社会問題を数理モデル化し，問題に対する解決策を数学的に考察するということを行っています。数理最適化もまさにそれを目指した分野であり，現実社会の問題を数理モデル化し，制約条件を満たしつつコストを最小化，あるいは利益を最大化するような変数の値を求めるということを行っています。（p.8 に詳細があります。）

講義を通して，数学が現実社会ではどのように役立っているのかなどを実感することができました。

◆3 日目

京都大学　楠岡誠一郎先生･桑垣樹先生　講演会

楠岡先生と桑垣先生にお会いし，お一人ずつ 1 時間ほどの講義をしていただきました。

楠岡先生はご専門が確率論とのことで，大学で学ぶ確率論について，高校数学との違いも交えながら説明していただきました。大学の確率論ではとにかく厳密さが重視されるため，高校で学ぶ確率の印象とは全く異なっていました。

（p.9 に詳細があります。）

桑垣先生は数学全体の発展の仕方と圏論という分野について話してくださいました。（p.11 に詳細があります。）ちなみに桑垣先生のご専門は「シンプレクティック幾何学」という分野で，物理学から着想を得た数学の分野の一つです。先生は数学科に移る前まで物理を専攻されていたのですが，数学をしていると，物理を勉強していてよかったと思うことがよくあるとおっしゃっていました。

講義後には個別の質問にも対応してくださり，お二人の学生時代のお話や数学の勉強に関するアドバイスをいただきました。

清水寺を観光！

清水寺を観光し，清水坂でお土産を買いました。

◆講義の内容(概要&抜粋)

<u>数理最適化</u>

　数理最適化をものすごく簡単に説明すると，**関数を最大あるいは最小にするような変数の値を求める**ということです。このような問題は高校数学でも習うと思います。例えば，数 I で習う 2 次関数の最大・最小問題や，数 II で習う線形計画法などがあります。これらは数理最適化の最も簡単な例です。講義の中で，次のような問題が出題されました(一部問題文を変更しています)。

［例題］　ある企業では製品 P，Q を生産している。1kg 当たりの収益はそれぞれ 3 万円，2 万円である。製品 P，Q はともに原料 a，b，c を原料としており，P，Q をそれぞれ 1kg 生産するために必要な原料 a，b，c の量は表に示した通りである。このとき，総収益を最大にするには P，Q をそれぞれ何 kg ずつ生産すればよいか。ただし，表に示したように，原料 a，b，c にはそれぞれ供給できる限界の量（最大供給量）があるものとする。

製品＼原料	a	b	c	収益［万円］
P	2	1	0	3
Q	0. 5	2	2	2
最大供給量	8	6	4	

［解答］　製品 P，Q をそれぞれ x kg，y kg 生産するとする（$x \geq 0$、$y \geq 0$）。このとき収益は $3x+2y$ である。必要な原料は a が $2x+0.5y$，b が $x+2y$，c が $2y$ であるから，これらが最大供給量以下であるためには

$$\begin{cases} 2x+0.5y \leq 8 \\ x+2y \leq 6 \\ 2y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

これらの条件を満たす必要がある。上の条件のもとで，$3x+2y$ を最大にする x，y の値を求める。

　不等式が表す領域をグラフに図示して考える。まず，$2x+0.5y \leq 8$ について考えると，これは $y \leq -4x+16$ と変形できるから，不等式が表す領域は図 1 の斜線部分である。ただし，境界線を含む。同様に $x+2y \leq 6$，$2y \leq 4$ も図示すると図 2 のようになる。最大化したい関数(目的関数)の値を

$$3x+2y=k \quad \cdots\cdots \text{①}$$

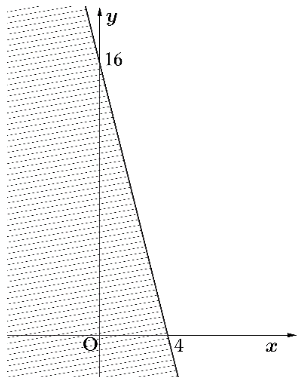


図 1

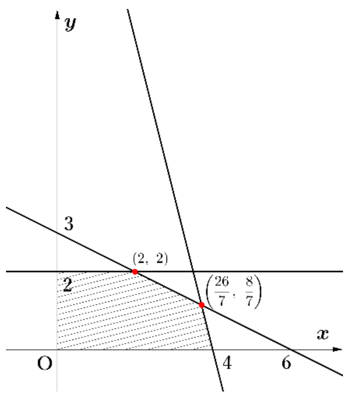


図 2

とおくと，$y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$ から，①は傾きが $-\frac{3}{2}$，切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。図 3 から，k の値は直線①が点 $\left(\frac{26}{7}, \frac{8}{7}\right)$ を通るとき最大となる。したがって，P を $\frac{26}{7}$kg，Q を $\frac{8}{7}$kg 生産すればよい。

答え P を 26/7 kg、Q を 8/7 kg 生産すればよい。

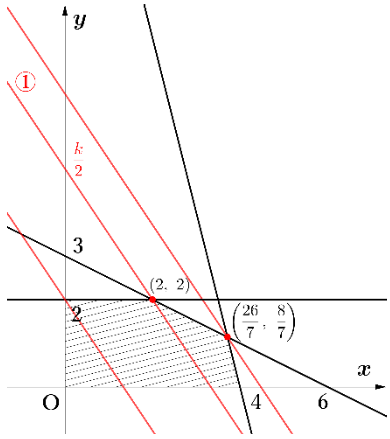


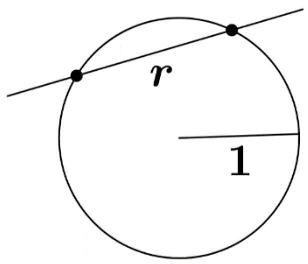
図 3

このような問題は生産計画問題と呼ばれます。上の問題は高校数学の知識で解けますが，現実の生産決定問題はもっと複雑です。製品の種類は 2 種類よりももっと多いはずですし，材料の種類ももっと多いはずです。製品の種類の数は解くべき変数の数に等しいため，製品の種類が多いとその分変数の数も増えます。このようにして問題がより複雑になると，多くの場合手計算では解けなくなるため，コンピューターに頼ることになります。そのためのアルゴリズムを研究する分野が数理最適化なのです。

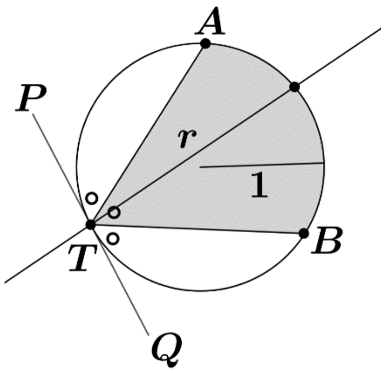
大学の確率論

大学の確率論はどのような学問なのか，高校数学の確率との違いは何かについて，楠岡先生に話していただきました。まずは，講義の中で出題された次の問題を考えてみてください。

［例題］ 半径が 1 の円がある。円と 2 点で交わるように一様な確率で直線を引くとき，$r > \sqrt{3}$ となる確率を求めよ。



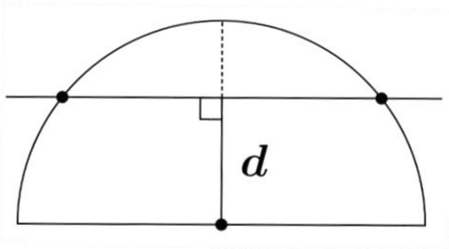
考え方がいくつかあるので，ここでは 2 つ紹介します。

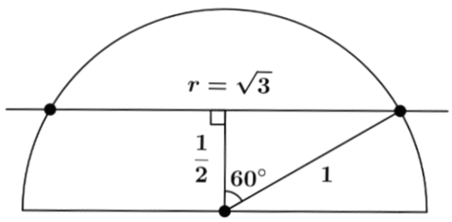


［解答 1］ 円と 2 点で交わるように一様な確率で直線を引くことを，1 つの交点の場所を固定し，もう 1 つの交点を円周上に一様な確率でとることとして考える。固定した交点 T で円に接する接線 PQ を引き，$\angle ATP = \angle ATB = \angle BTQ = 60°$ となるように円周上に点 A，B をとる。このとき，$AT = BT = \sqrt{3}$ であるから，$r > \sqrt{3}$ となるのは直線が図の灰色の領域内にあるときである。よって，円周上に同様に確から

しく点を打つとき，点が弧 AB 内に打たれる確率を求めればよい。ここで，$\triangle ATB$ は正三角形であるから，弧 AT，AB，BT の長さはすべて等しい。よって弧 AB 内に点が打たれる確率は 1/3。
答え 1/3

［解答 2］ 円の中心と直線の距離を d とおく。円と 2 点で交わるように一様な確率で直線を引くことを，区間 $0 \leq d < 1$ の中から一様な確率で d を選ぶこととして考える。このとき，図は半円で十分である。$r = \sqrt{3}$ となるのは，図に示したように $d = 1/2$ のときであるから，$r > \sqrt{3}$ となるのは $0 \leq d \leq 1/2$ のとき。よって，その確率は 1/2。 **答え 1/2**





解答 1 と解答 2 で答えが違いますね…。どちらかの解答に誤りがあるのでしょうか。実はこのようなことが起こってしまった原因は**問題文のあいまいさ**にあります。具体的には，「円と 2 点で交わるように一様な確率で直線を引く」という部分をどう解釈するかによって答えが変わってしまうのです。実際に，紹介した解答 1 と 2 ではこの部分の解釈が異なります。

円と 2 点で交わるように
一様な確率で直線を引く
→ ［解答 1］
1 つの交点の場所を固定し，
もう 1 つの交点を円周上に一様な確率でとる
→ ［解答 2］
区間 $0 \leq d < 1$ の中から
一様な確率で d を選ぶ

大学の確率論では，このように議論にあいまいさが残るのを防ぐために確率を厳密に定義し直します。ここではあまり詳細は話しませんが，まず**σ-加法族（シグマかほうぞく）**と**測度（そくど）**というものを定義し，そのうえで**「確率空間」**というものを定義することで確率が厳密な概念となるのです。（こうして展開される確率論は「公理的確率論」と呼ばれます。）難しいですね…。
高校数学と大学数学における「確率」の橋渡しになるようなお話でした。公理的確率論に興味のある方はインターネットや参考書を利用して少しずつ勉強してみてください。

数学の発展と圏論

数学という学問の 1 つの側面として「抽象化」というものがあります。物事を抽象化し，より一般的に成り立つ定理・法則を見出すという作業を繰り返すことで数学は発展してきました。しかし，数学の発展には抽象化だけでなく，具体化，つまり抽象化の過程でいったん捨てた詳細な情報を再び復活させるという作業も必要です。数学の発展には抽象化と具体化の両方が必要になるのです。

このことがよくわかる例として，現代数学の 1 分野である**「圏論(けんろん)」**について，桑垣先生に話していただきました。圏論は比較的最近生まれた分野で，数学の中で最も抽象的・基礎的な分野と言われています。今までは，最も抽象的かつ基礎的な分野として「集合論」が代表的でしたが，現在ではそれに代わって圏論が挙げられています。ここでは，圏論も先程話した抽象化と具体化によって発展してきたという話をしようと思います。あまり数学的な内容には触れないので，圏論という分野の紹介があるんだな～という気持ちで読んでもらえると嬉しいです。

圏論では「圏（けん)」という概念を扱います。圏とは簡単に言えば「複数の『点』とそれらを結ぶ『矢印』の集まり」のことです。

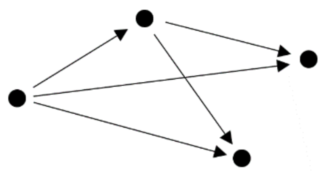


図 1　圏のイメージ

圏のイメージとして，ネットワークのようなものだと考えるのが一般的です。矢印が情報の伝達を表し，その始点が発信者，終点が受信者というイメージです。点と矢印によるネットワークについて一般的に成り立つ法則を探すのが圏論であると言えます。

ここでは，ネットワークというイメージからは離れて，矢印を「点から点への移動」だと考えてみてください。点から点への移動を矢印によって直線的に表しています。本来，点から点へ移動する経路は直線だけではなく，曲がりくねった経路やギザギザした経路など無数に考えられます。しかし，そのような経路の形，あるいは点から点へどのように移動したかという詳細な情報をすべて捨て，移動の始点と終点だけに注目したものが矢印ということになります。つまり，矢印は「点から点までの移動」を抽象化した概念なのです。

※圏論において，矢印を「点から点までの移動」を抽象化した概念であると表現することは一般的にはありません。圏の具体例として経路が用いられることはありますが，いつでもそう表現するわけではないので注意してください。ちなみに，圏論では矢印を「射」と言います。

数学は抽象化と具体化によって発展してきたと言いましたが，圏論の発展においても同じことが言えます。通常，圏論の対象となるのは点と矢印であり，その矢印は「点から点までの移動」を抽象化した概念でした。そして実は，抽象化の過程で捨てた情報，つまり点から点まで「どのように移動

したか」という情報を復活させ，圏を発展させた分野が存在します。それが**「無限圏」**です。

図 2　無限圏のイメージ

はじめに抽象的な圏で多くの結論を得て，次に，再び詳細な情報を復活させて具体化された，無限圏についての理解を深める。

このように，圏論の発展も抽象化と具体化によって進んできました。そして，これは数学のほとんどどの分野でも共通して言えることです。数学の分野は幅広く膨大ですが，それぞれの分野どうしのつながりや関連性がわかると勉強しやすくなるということがよくあります。分野どうしの関連性を理解するうえで，なにをどのように抽象化した学問なのか，あるいは具体化した学問なのかという視点は，持っていて損はないと思います。

桑垣先生の講義内容からかなり抜粋し，圏論を話題に挙げましたが，実際どのような定理・法則があるのかなどは説明できなかったのであまり腑に落ちない文章だったかもしれません。はじめにも言った通り，分野の紹介だと思ってもらえたら嬉しいです。圏論について詳しく知りたい方はネットや参考書などで勉強してみてください。

第2章

英語で数学入門！

OG ＊＊＊＊＊＊

はじめに

みなさんは数学を楽しんでいますか？この部誌を読んでいる方ならきっと数学が大好きで全力で数学を楽しんでいると思います。では、英語でも数学を楽しめますか？と尋ねられたらどうでしょうか。英語ではなかなかハードルが高そうに感じる方も多いのではないでしょうか。そもそも英語で数学をやることの意義もあまり感じられないかもしれません。英語で数学を学ぶ教材も、中高生以上を対象としたものがあまり充実していないというのが現状です。

私は昨年の九月から英国の Rugby School に留学生として編入し、そこでさまざまに数学を楽しんでいます。昨年度の一年間では、イギリスの先生方のサポートもあって、3 学年上までを対象とするイギリス版の数学オリンピック、BMO の本選最終ラウンド（春合宿のひとつ前）まで進むことができました。この記事では私の経験を通して感じた「英語での数学」の重要性、日本語での数学との違い、そして主に中高生の皆さんに向けて、どのように英語での数学に触れたらいいかについて書いていきます。

目次

1. 英語で数学をすることの意義
2. 英語での数学の第一歩！～基礎表現～
3. 問題（後述の SMC から）
4. 最後に　←良いリソースについて沢山紹介しているので、最後と言っておきながら個人的にここがメインです。

1　英語で数学をすることの意義

そもそも、わざわざ英語で数学をすることの重要性はどこにあるのでしょうか。私が感じる意義は主に二つあります。

一つ目は、受け取れるリソースの豊富さが全く違うことです。英語の強みは何よりも話者の多さにあります。日本語話者（＊１）は世界中におよそ 1 億 2800 万人いるのに対して、英語の話者（＊１）はその約 9 倍である 11 億 3200 万人ほどと言われています。インターネットの世界では特に英語が強く、その 6 割が英語で書かれているとも言われています。これはつまり、数学を学習する上で必要なリソースの量と種類もそのくらい違うことを示しています。ウェブサイトや動画チャンネル、本や論文など、英語で書かれたもの・話されているものを利用できるようになれば、もっと数学を楽しめると思いませんか？

日本とは分野の扱う順番が違うので、よりわかりやすい解説や例題たちに出会えることもあるかもしれません。私自身、英国の学校で中学３年生相当の学年の時に発展課題でテイラー展開の応用問題に出会いました。ネットで調べたところ、日本語では大学生を対象としたページ

がほとんどな上に似た例題があまりみつかりませんでした。一方で、英語ではその問題と近い例題やそのわかりやすい解説がたくさん見つかりとても助かったのをよく覚えています。英語は日本語と文法構造も違いますし、英語の方が簡潔にわかりやすい説明ができることもあります。違う視点から数学を俯瞰することで視野も広がり、数学を楽に深く学ぶ助けになるかもしれません。

二つ目は、自分の数学の強みを長く活かせるというところです。このグローバルな時代では、特に大学に進んだ時などは海外の方と接する機会も多くあると思います。日本の大学に来た留学生の方かもしれませんし、自分が留学する機会があるかもしれませんよね。そんな時にも臆せずに数学を楽しめるぞという自信があれば、自分の将来の可能性を広げることができます！大学に行き研究を始めれば、英語で論文を読むことも増えてくるかと思いますが、そんな時にも安心です。

2　英語での数学の第一歩！～基礎表現～

ここまで英語での数学の重要性について熱く（？）語ってきましたが、やっぱり英語はハードルが高いのではないかと思われるかもしれません。ですが！数学はあくまでも世界共通言語である数式がメインですから、英語での勉強を始めるにはぴったりの手がつけやすい分野です。使われている文法や構造もシンプルなものばかりで、英語の書籍や小説を読むよりもかなり楽です。

その第一歩目として、よく使う表現を挙げておきます。専門用語的単語は挙げるとキリがありませんし、ネットで調べれば出てくると思いますので、今回は省略します。（＊２）

Hence：よって・したがって・故に　　Therefore：それ故に・したがって
Thus：このように・したがって　　Similarly：同様に
We have～：～が成り立つ　　It follows that：変形して～
assume：～と仮定する　　be not compatible with～：～と矛盾する
subject to～：～を条件に　　Let ~ be …：~を…とおく(変数・定数の定義)
deduce：推定する(既知の事柄から結論を導く)
rewrite：書き直す（式を変形してこのようにも書ける、などと書くときに使う）
Loss of generality：一般性の損失
　e.g. ‘Without loss of generality, we may assume～’：一般性を失わず、～とおける

特に Hence は数学以外ではほとんど見かけない特有の表現だと思います。このほか、主語は we で書きがちといった傾向もあります。特に図形の問題では特殊な長めの単語が多く出てきますが（orthocentre：垂心など）、外見に惑わされず焦らず一つ一つ意味を把握すれば必ず理解できます！

3　問題（後述の SMC から）

慣れとして、実際の英語の問題とその解答を見て見ましょう。

A regular m-gon, a regular n-gon and a regular p-gon share a vertex and pairwise share edges, as shown in the diagram. What is the largest possible value of p?

3.1　問題の意味

まずは意味の理解から始めます。この問題＋後述の解答で必要な用語は以下の通りです。

n-gon：n角形	regular：正〜
vertex：頂点	pairwise：対を成して、二つをペアにして
edge：辺	side：辺
polygon：多角形	integer：整数
positive：正の	

これを踏まえると、「正m角形、正n角形、正p角形は、図で示されているように一つの頂点を共有し、対を成して辺を共有している。ありうる最大のpはなにか。」と読めます。

3.2　解き方の解説

まずは日本語で解答の流れを説明します。それぞれの角について式を立て、足して 360° になることを立式します。それを変形して、三元不定方程式の整数問題にすることができます。

ではいよいよ英語での解答です。後ほどの日本語訳を読みやすくするために、解答の同じ区切りのところで①や②といった印をつけています。(1)や(2)などは、解答中に後で言及するための印なので別です。

それでは、ぜひ一度ご自身で読んでみてください！

Solution

The sum of the internal angles of a polygon with m sides is $(m-2)180°$. Hence each internal angle of the regular m-gon is $\left(\frac{m-2}{m}\right)180°$, and similarly for the regular n-gon and the regular p-gon. Therefore, because the sum of the angles at a point is 360°, we have $\left(\frac{m-2}{m}\right)180° + \left(\frac{n-2}{n}\right)180° + \left(\frac{p-2}{p}\right)180° = 360°$. ①

It follows that $\frac{m-2}{m} + \frac{n-2}{n} + \frac{p-2}{p} = 2.$

We may rewrite this last equation as $\left(1-\frac{2}{m}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{p}\right)=2.$

Hence $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$ (1) ②

We note that as p is a positive integer, it follows from (1) that
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}.$ (2)
We seek a solution of (1), where m, n and p are positive integers and p is as large as possible.

For p to be as large as possible, $\frac{1}{p}$ needs to be as small as possible. Hence, by (1), $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ needs to be as large as possible, subject to the inequality (2). Thus, m and n need to be as small as possible. Without loss of generality, we may assume that $m \leq n$.
By (2), $m \geq 3$. If $m = 3$, then $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, and hence $n > 6$. When $m = 3$ and $n = 7$, we have $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$. Hence, by (1),
$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{1}{42}$ and so $p = 42$. We show that this gives the largest possible value of p.

③
We cannot have $m = n = 4$, as this is not compatible with the inequality (2).
If $n > m \geq 4$, we have $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}<\frac{10}{21}$ and so $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ is not as large as possible.
Hence the largest possible value of p is given by $m = 3$, $n = 7$ and
$p = 42$.

3.3 日本語訳
（解答）

m角形の内角の総和は$(m-2)180°$であるから、正m角形のそれぞれの内角は$\left(\frac{m-2}{m}\right)180°$であり、正$n$角形と正$p$角形についても同様である。頂点での角の総和が 360° であるから、$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$が成り立つ。①

変形して $\frac{m-2}{m}+\frac{n-2}{n}+\frac{p-2}{p}=2$、さらに$\left(1-\frac{2}{m}\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)+\left(1-\frac{2}{p}\right)=2$とかけるから$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$である。… (1)②

pは正の整数であるから、(1)より$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$ … (2)

ここで、(1)の解m,n,pは正の整数でpはできるだけ大きい必要がある。そのためには、$\frac{1}{p}$はできるだけ小さくする必要がある。したがって(1)から、$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$は不等式(2)を条件としてで

きるだけ大きい必要がある。よって、mとnはできるだけ小さくする必要がある。ここで、$m \leq n$としても一般性を失わない。

(2)から、$m \geq 3$である。$m=3$の時、$\frac{1}{n} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$であるから$n > 6$である。$m=3$かつ$n=7$の時、$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$である。よって(1)から、$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$、したがって $p = 42$。これがpのありうる最大の値であることを示す。③

$m = n = 4$は、不等式(2)と矛盾するためあり得ない。

$n > m \geq 4$である時、$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} < \frac{10}{21}$であるため$\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$が最大ではない。

したがって、pのありうる最大の値は$m = 3, n = 7$である時 $p = 42$である。

3.4 重要なポイント

英語で数学を行うとき、記述式で答えを述べるものが日本よりも多いです。そのときに気をつけなければいけないのが、行間を読まずにその解答だけ読んで論理が誰にでも理解できるか、という点です。日本語でも基本は同じですが、根拠の説明に不足がないように常に気をつける必要があります。

また、上記の問題で言う③以降の「$p = 42$が本当に最大であることを確かめる」というステップが非常に重要です。どんな問題でも、最後に出した答えが正しいことを確かめなければいけません。これは結構重視されている感覚もありますし、自分のためだけでなく解答を見てくれる方にも（そんな人が誰もいなくても）しっかり確認したことを書いて示すようにしましょう。

4 最後に

ここまで英語での証明などについて見てきました。最後に、この記事を読んで英語での数学学習に興味を持ってくださった方のためにおすすめのウェブサイトと教材、そして私も参加した大会をご紹介します。日本で少し調べても出てきづらいものばかりでここが一番私の経験がいかせている内容だと思うので、目次でも書いた通り、最後にと言いながらここがメインです。

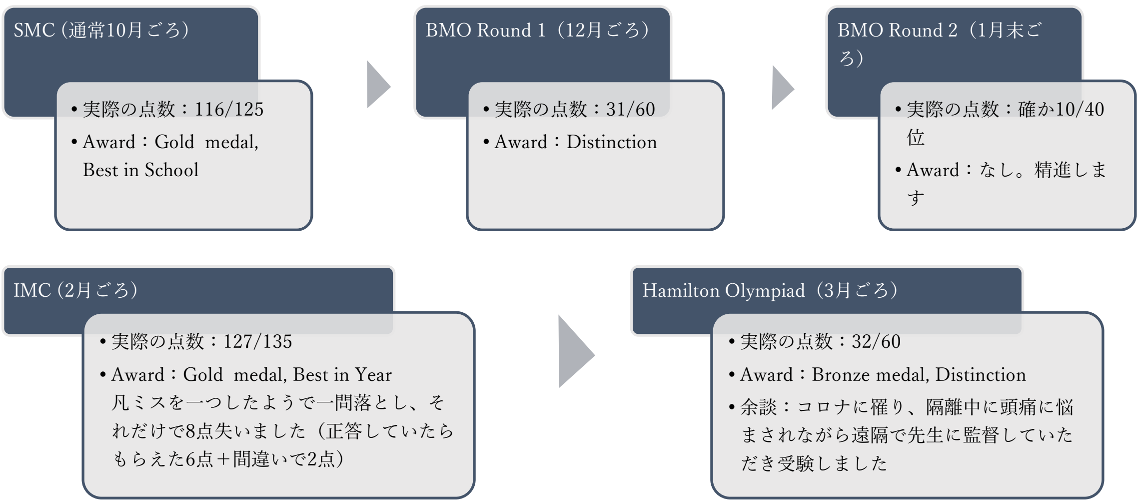
4.1 大会（学校や団体としての申込が要りそうですが、参考までに）

1. IMC (Intermediate Mathematical Challenge)

   高校一年生～高校２年生相当である Year 11 までを対象とした数学チャレンジです。正直にいって簡単なので、三角関数くらいまでの理解が十分にあれば後述の SMC の方を受けることをお勧めします。逆に、三角関数が未修の方は SMC の後半の問題で苦しくなると思いますので IMC から始めると良いかと思います。解答は全て選択式で、間違えると失点があるので結構痛いです。

   この大会で良い成績を取ると、学年によって分けられた Kangaroo という数学チャレンジに、それよりも良い成績を取ると学年によって分けられたオリンピックに参加することができます。これらのオリンピックは説明を省きますが、形式は後述の BMO と同じで、少し問題のレベルを下げた版と思えば良いです。

2. SMC (Senior Mathematical Challenge)
高校三年生～大学一年生相当である Year 13 までを対象とした数学チャレンジです。数学好きなら中学生でも問題なく参加できるレベルだと思います。問題は全て選択式ですが、90 分で 25 問あるのでタイムマネジメントの意識が必要です。IMC と同じく間違えると点が引かれるので、正解に比べた時の失点が大きくなります。ですから全ての問題を時間内に速く正確に答えることが求められます。
IMC は通常 2 月（2022 年度は 2023 年 2 月 1 日）なのに対して SMC は 10 月（2022 年度は 2022 年 10 月 4 日）なので、両方参加することもできます。
良い成績を取ると Senior Kangaroo、それよりも良い成績だと後述の BMO に招待されます。
3. BMO (British Mathematical Olympiad)
いわゆるイギリスの数学オリンピックです。SMC で良い成績を取ると、Round 1 への招待を受けることができます。全世界で 1000 人ほどが参加する大会です。
Round 1 は 3 時間半で 6 問の解答を全て記述で答えるという長丁場で、証明問題のほかそうでなくてもその答えに至るまでの過程を丁寧に説明しなければいけません。一問 10 点ですが、正しい答えでも 10 点満点を取るのは難しい試験になっています。
世界で上位 100 名ほどが Round 2 に進みます。3 時間半で 4 問を解答し、Round 1 と同じように全て記述式です。1 に比べても難易度は上がっていたように思います。それを通るとさらに春合宿やイギリス代表というところまで見えてきます。
4. 実際の大会の流れと結果
私は IMC から派生した一連の大会と、SMC から派生した一連の大会の二つに参加しました。実際の流れはこんな感じです。参考までに結果も。



4.2　ウェブサイト・教材

1. UKMT (United Kingdom Mathematics Trust)のホームページ

   https://www.ukmt.org.uk

   ここまで挙げた大会を全て運営している団体です。IMC や SMC、BMO の過去問題集や解説に加えてビデオリソースも出しています。大会には参加しなくてもこれらの過去問題集を解いてみるだけで、かなり良い勉強になるのではないかと思います。上記にて解説した通り、レベル感も中高生にちょうど良いのではないでしょうか。

   https://www.ukmt.org.uk/competitions/solo/senior-mathematical-challenge/archive
   ←SMC の過去問と解説

   https://www.ukmt.org.uk/competitions/solo/intermediate-mathematical-challenge/archive ←IMC の過去問と解説

   https://bmos.ukmt.org.uk/home/bmo.shtml ←BMO の過去問。解説は直近２年のみ閲覧可能です。

   https://bmos.ukmt.org.uk/solutions/ ←BMO Round 1 の解説ビデオ。かなりわかりやすいです。

2. Maths Admissions Test

   通称 MAT と言われる、オックスフォード大学の数学が関連する学部を受験する際に必要になる試験です。イギリスでは、高校二年生～大学一年生相当の生徒で発展数学(Further Mathematics)を選択している人が発展の数学課題としてよく使っている印象です。記述もガッツリ含まれています。数 III まで習得していればおおよそ大丈夫ですが、レベルは結構高め。BMO よりも進んだ知識と応用が必要とされます。Computer Science を取っている学生向けの少し変わった問題も含まれているので、問題は選んで活用すれば良いと思います。

   https://www.maths.ox.ac.uk/study-here/undergraduate-study/maths-admissions-test

   ↑MAT についての説明と過去問、その答えと解説が載っています。過去問はひたすら下にスクロールすると出てきます。

3. Sixth Term Examination Paper

   通称 STEP と言われる、ケンブリッジ大学の数学が関連する学部を受験する際に必要になる試験です。こちらも MAT とレベル感はおおよそ同じで、発展の数学課題としてよく使います。私個人的には、私の学校では STEP のサポートの方が手厚かったのでこちらの方に馴染みがあります。MAT に比べて特殊な問題は少なく、Pure Mathematics、Mechanics、Probability and Statics の三つのセクションに分かれています。STEP は一つの大問のなかの小問のレベルがだんだん上がっていき、前の問題からの結果を積み上げて一つの事実を証明するといった形式が特徴なので、個人的には MAT よりこちらがお勧めです。

   https://www.maths.cam.ac.uk/undergrad/admissions/step

↑STEP の詳しい説明はこちら。

https://www.admissionstesting.org/for-test-takers/step/preparing-for-step/#

↑過去問と解説、そのほかの対策リソースはこちら。

4. Oxford Mathematics (Plus)

MAT の解説動画などを出しているチャンネルです。長丁場の動画が多いのでとっつきにくいかもしれませんが、Plus でない方には 10 分程度の MAT の解説動画があります。Plus の方では 1-2 時間ほどの配信で面白い問題について話したりしているので、英語の学習にもお勧め。

https://www.youtube.com/c/OxfordMathematics　←Oxford Mathematics

https://youtube.com/c/OxfordMathematicsPlus　←Oxford Mathematics Plus

＊１：ここでいう話者は母国語としていない人も含んでいます。

＊２：綴りは全てイギリス式なので、日本で一般的なアメリカ式とは違います。

参考文献

- United Kingdom Mathematics Trust. "Senior Mathematical Challenge archive 2020 Solution and investigations" (参照 2022 年 8 月 16 日)
  https://www.ukmt.org.uk/sites/default/files/ukmt/senior-mathematical-challenge/SMC_2020_Extended_Solutions.pdf
- ねとらぼ調査隊. "【日本語は 13 位】話者が多い世界の言語ランキング！「英語」「中国語」に次ぐ３位は？" 2021 年 4 月更新（参照 2022 年 8 月 16 日）
  https://nlab.itmedia.co.jp/research/articles/161053/

第3章

(2 桁) × (2 桁) の暗算　超インド式

高等部３年　＊＊＊＊＊＊

世の中の多くの人たちは(1 桁)×(1 桁)の暗算はできても,(2 桁)×(2 桁)の暗算はできない. それは,かけ算九九が(1 桁)×(1 桁)までにしか対応していないから当然のことである. しかし,以下の 5 つの計算方法を(忙しい人は(5)の方法だけでも)習得すれば,数秒で暗算できるようになるのである.

(1) 十の位の数が同じで一の位の数の和が 10 のとき

2 つの 2 桁の自然数を,1 以上 9 以下の整数 a,b を用いてそれぞれ次のように表す.

$$10a+b,\quad 10a+(10-b)$$

これらの自然数の積を求める.

$$(10a+b)\times(10a+10-b)=100a^2+100a+10b-b^2$$

$$=\underline{a(a+1)\times 100+b(10-b)}$$

よって、百の位には$a(a+1)$, 一の位には$b(10-b)$を配置すればよいことがわかる.
(例えば,百の位に 12,一の位に 5 を配置したら,1205 となる.)

○例題

① 61×69

百の位:6×(6+1)=<u>42</u>　　(千の位は 4,百の位は 2)

一の位:1×9=<u>9</u>　　(十の位は 0,一の位は 9)　　<u>よって答えは 4209</u>

② 12×18

百の位:1×(1+1)=<u>2</u>, **一の位**:2×8=<u>16</u>　　<u>よって答えは 216</u>

③ 85×85

百の位:8×(8+1)=<u>72</u>, **一の位**:5×5=<u>25</u>　　<u>よって答えは 7225</u>

④ 94×96

百の位:9×(9+1)=<u>90</u>, **一の位**:4×6=<u>24</u>　　<u>よって答えは 9024</u>

(2) 十の位が同じとき（一の位の和はなんでもよい)

2 桁の自然数 A,B を,1 以上 9 以下の整数 a,b,c を用いて次のように表す.

$$A=10a+b,\quad B=10a+c$$

これらの自然数の積を求める.

$$(10a+b)\times(10a+c)=100a^2+10ab+10ac+bc$$

$$\underline{=(10a+b+c)a\times 10+bc}$$

よって, 十の位には$(10a+b+c)a$ つまり$A+c$, 一の位にはbcを配置すればよい.
（例えば, 十の位に 188, 一の位に 12 を配置したら, 1892 となる.）

○例題
①13×15
　十の位$:(13+5)\times 1=18$, **一の位**$:3\times 5=15$　　よって答えは 195
②28×29
　十の位$:(28+9)\times 2=74$, **一の位**$:8\times 9=72$　　よって答えは 812
③32×37
　十の位$:(32+7)\times 3=117$, **一の位**$:2\times 7=14$　　よって答えは 1184
④71×74
　十の位$:(71+4)\times 7=525$, **一の位**$:1\times 4=4$　　よって答えは 5254
⑤87×87
　十の位$:(87+7)\times 8=752$, **一の位**$:7\times 7=49$　　よって答えは 7569

(1) より (2) のほうが面倒なことがわかる. また, 平方数はこの計算で求められる.

(3) 十の位の和が 10 で, 一の位が同じとき

2 桁の自然数を, 1 以上 9 以下の整数 a, b を用いて次のように表す.

$$10a+b,\quad 10(10-a)+b$$

これらの自然数の積を求める.

$$(10a+b)\times(100-10a+b)=1000a-100a^2+10ab+100b-10ab+b^2$$
$$\underline{=(10a-a^2+b)\times 100+b^2}$$

よって百の位には、$(10a-a^2+b)$, つまり十の位の積と一の位の数の和,
一の位にはb^2を配置すればよい.

○例題
①41×61
　百の位$:4\times 6+1=25$, **一の位**$:1\times 1=1$　　よって答えは 2501
②25×85
　百の位$:2\times 8+5=21$, **一の位**$:5\times 5=25$　　よって答えは 2125
③73×33
　百の位$:7\times 3+3=24$, **一の位**$:3\times 3=9$　　よって答えは 2409
④14×94
　百の位$:1\times 9+4=13$, **一の位**$:4\times 4=16$　　よって答えは 1316

⑤49×69

百の位:$4\times 6+9=33$, 一の位:$9\times 9=81$　　　　よって答えは 3381

一の位が同じで, 十の位の和が 10 でないときの計算方法もあるが, 覚える意味はあまりないため, 今回は紹介しない.

(4)2 つの自然数が, ともに 90 以上であるとき

2 桁の自然数を, 1 以上 10 以下の整数 a, b を用いて次のように表す.

$$100-a,\ \ 100-b$$

これらの自然数の積を求める.

$$\begin{aligned}(100-a)\times(100-b)&=10000-100a-100b+ab\\&=\underline{(100-a-b)\times 100+ab}\end{aligned}$$

よって, 百の位には$(100-a-b)$, 一の位にはabを配置すればよい.

（ただし, a と b は必ずしも 2 桁の自然数の一の位に一致しないことに注意する必要がある. ちなみに, a と b は 2 桁の自然数の一の位の数と 10 の差の絶対値である.）

○例題

①98×98

$a=2, b=2$ より, 百の位:$100-2-2=96$, 一の位:$2\times 2=4$　　　　よって答えは 9604

②95×96

$a=5, b=4$ より, 百の位:$100-5-4=91$, 一の位:$5\times 4=20$　　　　よって答えは 9120

③91×93

$a=9, b=7$ より,. 百の位:$100-9-7=84$, 一の位:$9\times 7=63$　　　　よって答えは 8463

④89×95

$a=11, b=5$ より, 百の位:$100-11-5=84$, 一の位:$11\times 5=55$　　　　よって答えは 8455

（一方の自然数が 89 や 88 などでも計算が楽になる. ちなみに, 2 つの自然数が 90 未満の場合でも a と b の値が求められるから, この計算方法はいつでも使えるが, 必ずしも計算を楽にしてくれるとは限らない.）

⑤97×99

$97\times(100-1)=9603$　　　　よって答えは 9603

（一方の自然数が 99 であるときは, もう一方の自然数が何であっても, 100−1 に置き換えると計算が楽になる. 98 を 100−2 とするのも有効.）

(5) その他すべてのかけ算

2 桁の自然数を, 1 以上 9 以下の整数 a, b, c, d を用いて次のように表す.

$$10a + b,\ \ 10c + d$$

これらの自然数の積を求める.

$$(10a + b) \times (10c + d) = 100ac + 10ad + 10bc + bd$$
$$\underline{= ac \times 100 + (ad + bc) \times 10 + bd}$$

よって, 百の位にはac, 十の位には$(ad + bc)$, 一の位にはbdを配置すればよい.
（この計算方法を覚えれば, (1)～(4) を知らなくても, すべての問題に対応できる.）

〇例題

①18×24

百の位: $1 \times 2 = 2$, 十の位: $1 \times 4 + 8 \times 2 = 20$, 一の位: $8 \times 4 = 32$ よって答えは 432

②23×41

百の位: $2 \times 4 = 8$, 十の位: $2 \times 1 + 3 \times 4 = 14$, 一の位: $3 \times 1 = 3$ よって答えは 943

③59×63

百の位: $5 \times 6 = 30$, 十の位: $5 \times 3 + 9 \times 6 = 69$, 一の位: $9 \times 3 = 27$ よって答えは 3717

④42×69

百の位: $4 \times 6 = 24$, 十の位: $4 \times 9 + 2 \times 6 = 48$, 一の位: $2 \times 9 = 18$ よって答えは 2898

⑤78×96

百の位: $7 \times 9 = 63$, 十の位: $7 \times 6 + 8 \times 9 = 114$, 一の位: $8 \times 6 = 48$ よって答えは 7488

ほかの方法もあるが, とりあえず(1)～(5)までを習得すれば, (2 桁)×(2 桁)の暗算が問題なくできるようになる. かけ算の練習ができるようなアプリもあるため, (Ninimaths というものがおすすめ)経験を積んで, テストのみならず日常生活でも, この暗算法を役立ててほしい.

第4章

数学は哲学か？

高等部 2 年　＊＊＊＊＊＊

1. はじめに

まずは，数学研究同好会の会誌をお読みいただき，ありがとうございます。今回私は「数学は哲学か？」というタイトルの通り，数学と哲学との関係性についての考察をお話しします。

「人間は考える葦である」と述べたパスカル，「われ思う，ゆえに我あり」で知られるデカルト。この両者は，数学者としても大変名高い存在です。彼ら以外にも，数学者であり哲学者であった(ある)人物は多くいます。…ならば，「数学」と「哲学」は近しい関係なのか？　という疑問が湧いてきたのが，つい最近のことです。だいぶ急ピッチでの執筆で~~まとめサイトのようになってしまう可能性~~はありますが，この期間に私が調べ，考えたことを整理してお話ししていこうと思います。

2. 数学とは何か？

2.1　数学の定義

さて，この次でお話しする「哲学とは何か？」でも同様ですが，大人にもなっていない(ほかの文献の著者に比べると，どうしてもそれに触れることが可能な時間が短い)　かつ　数学 or 哲学　にどっぷり浸かっているわけでもない私のイメージをお話しして，それをもとに議論を展開したところでいいものにはなりません。

したがって，より多くの方が納得しやすい議論をするために，先人の言葉をもとに解釈・定義していくことにします（こちら側で少々表現を変更したりもしましたが，大意は変わっていないはずです)。

では，「数学」を定義していきましょう。今回採用する定義は，以下の通りです。

「数学とは，異なるものを同じものとみなす技術である」(ポアンカレ)[1]

なんとも含蓄のある表現です。この言葉を遺したポアンカレは 19 世紀の終わりにかけて活躍した万能・天才数学者で，「ポアンカレ予想」などでも知られています。(話からそれますが，NHK の「笑わない数学」という番組でこの「ポアンカレ予想」が扱われていました。この回のみならず面白く，「わかりやすさ」も追求されている番組ですので，是非ご覧ください。)

2.2 定義の検討

ポアンカレによれば，数学は「異なるものを同じものとみなす技術」だそうです。

この定義が，「数学」のエッセンスを含んだものなのか検討してみましょう。

数学では，いくつかの事例において成り立つ性質を，「一般化」・「拡張」することがあります。中学生・高校生の皆さんは数学の教科書(例：[2])で，たびたび「一般に，次のことが成り立つ。」といった文言を見かけていると思います。数学の発展を考えても，その事例だけにとどまらない探究を行ったことで，飛躍的に進歩した分野は数多あります。

「抽象化」をすることが，数学に必要不可欠な事柄であるのは否定できないでしょう。一見複雑

なことのように見える「抽象化」は，物事を単純化し，理解できるようにする方法の 1 つでもあります。その「抽象化」について述べているポアンカレの数学の定義は良いものと言って間違いありません。

3. 哲学とは何か？

続いて，哲学を定義してみましょう。

「哲学とは，概念を創造すること」（ドゥルーズ）[3]

現代思想を語るうえで外せないとされる，ドゥルーズの言葉です。言われてみると，高校の「倫理」の教科書[4]には見たことない言葉たちが大量に並んでいました。まさに，創造された概念の集合体でした。「倫理」で取り扱った内容は多くが哲学と関係してましたから，ドゥルーズの言葉を実証しているといって過言ではないでしょう。この言葉は，哲学の「良い定義」の 1 つと言って差し支えありません。

4. 数学と哲学の関係

2.や 3.で紹介した定義から考えると，数学は「抽象化」，哲学は「概念の創造」を行う学問です。抽象化というのは，多くのものから共通項のみを取り出して考えることですが，これは概念の創造にも同じことが言えるのではないでしょうか。概念を形成するには，共通項がなければいけません(そうでなければただ混沌とした状態のままです)。粗い議論ですが，相当の共通性を数学と哲学に見出せたといえるでしょう。つまり，**「数学は哲学である」**のです。

5. 語源から考える

1 つの見方を絶対視してはいけませんから，ほかの側面からも数学と哲学の関係を考察します。

今回は「語源」から考えます。数学(mathematics)の語源は「学ぶ」，もしくは「学ばれるべきもの」であり，これに対し哲学(philosophia)は「知を愛すること」です。

いかがでしょうか。こちらの側面から見ても，数学と哲学は強く関係していると考えられるのではないでしょうか。

「文系」・「理系」といったくくりからすると全く違ったもののように感じられるかもしれない，「数学」と「哲学」は，実は深い関係にあるのです。「文系の本はハードルが高くて…」，「理系の本って数式ばっかりできっとついていけない…」といった「食わず嫌い」はもったいない，といえるかもしれません。

6. おわりに

すうけんに入って 5 年目ですが，部誌で，数式が全くない記事を執筆することになるとは思っていませんでした。この記事を書いている時点では，ほかのメンバーが何を書いているかわからないので，かなり浮いた記事になっている気がして心配です~~(私に分かるのは，この記事が完全に名前負けした記事であるということだけです)~~。

焦って執筆した記事で，本当に今回紹介したものが最も「良い定義」なのか，そもそも紹介した先

哲の意図を本当に正しく汲めているのか，様々なご意見があるかと思いますし，かなり飛躍した部分もあったかと思いますが，お許しいただければと思います。

今回，執筆したことによってさらに数学・哲学に興味が湧きましたし，そういう意味では書いてよかったなあと(自己満足ですが)思っています。

この記事が皆さんにとって「数学」や「哲学」に興味を抱くきっかけになれば，望外の幸せです。

(高 2 にもなって)拙い記事ですがお読みくださり，ありがとうございました。

7. 参考文献

[1]木村光一,2012,『高校数学　探究と演習　下』. Z 会，p.303.

[2]川中宣明・大島利雄・坪井俊・筧三郎・服部哲弥・加藤文元・深谷賢治・榎本博人・坂江正・大西俊弘・松永学・官野達博・宗重徹，2017,『数学Ⅱ』[改訂版]．数研出版.

[3]NHK,『100 分 de 名著　名著 105 資本論』.
https://www.nhk.or.jp/meicho/famousbook/105_sihonron/index.html ，2022.9.30 閲覧.

[4]佐藤正英・杉村靖彦・片山洋之介・児玉聡・細谷昌志・矢野優・吉田武男・福本修・星川啓慈・石塚健大・上原雅文，2017,『倫理』[改訂版]，数研出版.

第5章

暗号小史

高等部１年　＊＊＊＊＊＊

暗号って、いいですよね。暗号が嫌いな人なんていないと思います。私も当然暗号が好きなので暗号について語ろうと思います。

さて、暗号の定義は決まったものがないため、「所謂みんなが暗号だと思うやつ」を暗号とします。但し、文章を物理的に隠すような手法（ブラックライトを当てないと読めない、髪の毛を剃って頭皮に書き、また髪が生えるまで待つ等）は、ここでは解説しません。この文章の最後に用語についてまとめたものを載せてあるので、事前に読んでおくことをお勧めします。なお、n は全て 0 以上の整数とします。

原始的な暗号には**シーザー暗号**があります。シーザーが使っていたことで有名で、平文に使われている文字を何文字かずらす方法の暗号です。例えば、二文字ずらす場合だと、

ABCDEGHI…

↓

cdefghijk…

となります。CAT は ecv のように変換されますね。しかしアルファベットの文字数分しかずらせないので 26 パターン（26 文字ずらすと暗号文と平文が一致するため実質 25 パターン）しか作れません。全パターン試せば解けますね。

そこで生まれたのが**単一換字式暗号**です。一文字につき別の一文字を当てる暗号です。

ABCDEGHI…

↓

hoanxvzao…

のように、文字をそれぞれにランダムに割り振る方法です。これは 26！＝26×25×24×23…×1≒40000000000000000000000000 パターン作れます。ここまで多いとさっきのゴリ押し作戦は通用しません。しかしこれは「頻度解析」によって破られます。頻度解析とは、暗号文内のアルファベットの出現頻度を調べることです。これによって暗号文で使われるアルファベットを推測することができます。例えば、ある暗号文において A という文字が最も多く使われているとします。そして英語で使われるアルファベットの内、最も多く使われる文字は e です。つまり、A は e を意味すると考

えられます。更に、e は the, they, them, there, these,等、th とつながることが多いので、特定の文字がよく e の前についていたら、それらの文字は t と h だと推定できます。そうしてパズルのように当てはめて解読します。

こうして、頻度解析は古典暗号最大の敵となりました。これに対して、サイファーと呼ばれる、th や you 等のよく使われる綴りを一文字で表す方法や暗号文中に空字と呼ばれる全く関係ない文字を入れる方法がありますが、どれも決定的なものではありませんでした。

ホモフォニック暗号は頻度解析に耐性を持った暗号でした。この暗号は、例えば e は英文の 8%を占める文字であるため、03, 12, 25, 42, 59, 60, 71, 93 のようなランダムな 8 個の文字を用意します。同様に、もしその文字が英文の n%を占める文字であるなら、n 個の文字を用意します。そうすると計 100 個の文字ができますね？さらに、もし暗号文中に e と書きたいなら先ほどの 8 個の文字の中からランダムに一つ選び、書きます。それを繰り返すことで 100 個の文字がすべて同じぐらいの割合で登場する暗号文が完成します。頻度解析は暗号文中にある文字が登場する割合から平文を推測する方法なので、全ての文字が同じ割合で登場する暗号には使えません。しかし、この暗号にも当然弱点はあり、それが「文字の繋がり」でした。例えば、q の次に来る文字は必ず u です。そして q の出現頻度は約 1%、u の出現頻度は約 3%なので、もしもある文字の後に必ず決まった三文字のうちのどれかが続いていれば、その文字は q と u であることが推測できます。また、th, tion, ed, ing 等からもその文字が何か推測されるようになりました。

更に後の世代に生まれたのが**ヴィジュネル暗号**です。これは前述のシーザー暗号を改良して頻度解析への耐性を得た暗号です。この暗号では、初めに「鍵」を定めます。鍵は好きなアルファベットの羅列（後述する理由から文字数は素数で、長ければ長いほど良い）で構いません。ここでは仮に cat を鍵とします。さて、c は 1 番目のアルファベットである a の 2 文字後の文字なので、平文の 1 文字目のアルファベットは 2 文字ずらします。a は a の 0 文字後の文字なので平文の 2 文字目は 0 文字目ずらします（つまりそのまま）。t は a の 19 文字後の文字なので平文の 3 文字目は 19 文字ずらします。鍵が一周したら最初に戻ります。つまり平文の 4 文字目は二周目に入り、cat の c によって 3 文字ずらされるということです。よくわかりませんよね。下に挙げる例を見てもらった方が早いと思います。

鍵が cat で、平文が BANANA だとします。鍵の 1 文字目が c なので、平文の 1 文字目の B を 2 文字ずらして e とおきます。更に、鍵の 2 文字目は a なので、平文の 2 文字目を 0 文字ずらして…を繰り返します。そうすると、

$$\text{BANANA} \rightarrow \text{eagcnt}$$

となります。平文には a が 3 つあるのに、暗号文では全て別の文字に変換されていることがお判りでしょうか？これにより、頻度解析が無力化される…と思いきや新たな頻度解析の方法が考案されます。それがゴリ押し作戦です。具体的には、鍵が 2 文字だと仮定して、2n 文字目と 2n＋1 文字目の集合に対してそれぞれ頻度解析を行う、もし大きな成果が得られないとしたら、鍵が 3 文字だと仮定して 3n 文字目と 3n＋1 文字目と…を明確な結果が出るまで繰り返します。但し、仮に鍵が 4 文字だとすると、解読者が鍵を 2 文字だと仮定して頻度解析を行った時点で、ある程度それぞれの

文字が出現する割合に差が出ます。よって基本的に解読者は仮定する文字数は素数だけで構いません。更に、発信者は鍵の文字数は素数にするべきです。この暗号は鍵が長いほど解読が困難になり、解読法が確立された後も強力な暗号として知られていました。しかし、長大な鍵を発信者と受信者で共有する必要があること、鍵が知られると解読されるため、鍵の保管と破棄が難しいこと、平文を暗号化するのと暗号文を復号するのに手間がかかることから、特に重要な機密文書などでしか使われませんでした。

さて、このヴィジュネル暗号ですが、鍵が膨大な長さ、例えば平文より長ければ理論上解読は不可能で、現代暗号にもこれを利用したものもあります。しかし、初めてそれが使われたのが、第一次世界大戦後から第二次世界大戦までドイツが使用した暗号、エニグマ暗号です。平文を打つと自動で暗号文を生み出す機械を使った暗号です。

エニグマは 3 つのローターから構築されておりローターには 26 のメモリが刻まれています。そして、26 回文字を打つとローターが 1 回転し、2 番目のローターが 1/26 回転し、2 番目のローターが 1 回転すると 3 番目のローターが 1/26 回転します。そして、3 番目のローターが 1 回転するとき、ローターの配置が元に戻ります。ローターの配置によって鍵が決まるので、鍵の長さは 26 の三乗で 17576 文字にもなります。さらに、エニグマには 10 個のプラグがついていて、プラグでつながれた文字同士は暗号化されるときに入れ替わります。A と B がつながれている場合、A は B、B は A として扱われます。ここで、アルファベット 26 文字を 2 つずつ、10 組つなげる組み合わせの数を求めようと思います。まず繋げる文字を 20 個選びます。これは 26！/20！・6！です。更に、この中から 10 のペアを作るので、19・17・15・13・11・9・7・5・3・1/10！です。
（26！/20！・6！）（19・17・15・13・11・9・7・5・3・1/10！）は約 150 兆、よってプラグのつなぎ方は 150 兆通りあります。更に、ローターは 5 種類あり、その並べ方にもよって鍵が変わるので、その組み合わせの数は 5・4・3＝60 通りです。よってエニグマの初期パターンは 17576・15000000000000・60 となり、一垓を超えます。第二次世界大戦において、連合国はどのようにこれを解読したのか？これに関しては映画や書籍が沢山あるので、それを読むことをお勧めします。また、現代暗号についても書きたいところでしたが紙面が尽きてまいりました。それは来年の部誌に書こうと思います。

グダグダな文章と締まらない最後でしたが、ここまでご高覧頂き、ありがとうございました。

用語
暗号文：暗号化された後の文章。一般に小文字で表す。
平文：暗号化される前の文章。一般に大文字で表わす。
古典暗号：コンピューターが発明される前までの暗号
現代暗号：コンピューターを使った暗号
発信者：暗号文を送る人
受信者：暗号文を発信者から受け取る人
復号：暗号文を受信者が平文に戻すこと。
解読：暗号文を受信者以外の人が非正規の手段で平文に戻すこと。

第6章

Vieta Jumping から学ぶ数学

高等部２年　＊＊＊＊＊＊

まえがき

　ここでは、Vieta Jumping とはどういうものなのか、また Vieta Jumping で用いる手法や考え方がどのように応用が効くのかについて述べる。まず、Vieta Jumping について説明する。

1. Vieta Jumping とは

　Vieta Jumping を簡単に説明すると、ある文字について二次式であるような不定方程式を、解と係数の関係を用いて解くテクニックである。

　これだけでは Vieta Jumping がどういうものなのか、どのような時に使えるのかが不明瞭である。そこで Vieta Jumping の使い方や手順、気をつけるべき事項を以下で述べる。

2. Vieta Jumping の手順と使い方について

　今回、 Vieta Jumping の具体的な使い方を説明するために以下の例題を用いる。

〈例題〉
$ab+1$ が a^2+b^2 を割り切れるような正の整数 a,b に対して、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ が平方数であることを証明しなさい。

　結論から述べると、 (a, b)=(1, 1)の組以外に条件を満たす a, b の組は存在しないことが証明できる。ここで証明方法の一つとして挙げられるのが Vieta Jumping である。

　手順を簡潔に説明すると、まず最初に 2 次の係数が 1 で、1 次の係数と定数項が共に整数である 2 次の不定方程式の形に式変形できることが必要となる。このことを言い換えると、2 次の係数が １以外であるとき、または 1 次の係数と定数項が整数でなければ、Vieta Jumping を使って問題を解くことができないので注意しなければならない。

Vieta Jumping が使える式の例
・$a^2+b^2-3abc+4=0$
Vieta Jumpingが使えない例
・$a^3+b^2-ab+3=0$
・$a^2+2b^2+3ab-1=0$

　次に、ある文字についての二次方程式を満たす組のうち解の一方が最小の組(最小の解 x をもつ二次方程式の解の組)を設定する。解と係数の関係を用いて、最小の解 x よりも小さな解が存在することを示せれば、最小の解 x が最小であるという仮定に矛盾するため、そのような最小の解 x は存在しないということがわかる。このことから解の条件を絞ったり、解が存在しないことを導くこ

とができる。

上記の手順が Vieta Jumping を用いて示したいことである。今回の例題の場合は、(a, b)=(1, 1)以外に解が存在しないということを示したいため、最小性の矛盾から解が存在しないことを示すことが最終的な目標である。次の章から具体的に数値を用いて問題の解説を進めるが、本題から話がずれている部分があるため、次の章を飛ばして読んでいただいても構わない。

3. Vieta Jumping を使う問題に挑戦！

実際に、Vieta Jumping を用いて問題に取り組む

$a=b$ の場合、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ が
整数になるのは、 $\frac{2a^2}{a^2+1}$ が整数になるときであるのと同義であるため、分子、分母を a^2 で割ると、

$\frac{2}{1+\frac{1}{a^2}}$

と式変形でき、 a は自然数であるため、 a が大きい値を取るとき、

$\lim_{a\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{a^2}} = 2$

このように表せるため、 $\frac{2a^2}{a^2+1}$ がとりうる平方数は1以外あり得ない。
よって、 $a=b$ のとき、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ が整数になるのは
$a=b=1$ のときのみである。

$a\neq b$ のときについて考える。
示したいことは、 $a\neq b$ のとき、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=n$ を満たす平方数 n が存在しないということである。この命題の対偶は、平方数でない n を固定して $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=n$ を満たす (a,b,n) の組が存在しない、となる。よって、 $a^2+b^2=n(ab+1)$ の (a,b) の解が存在しないことを示せばいい。
$b_0>c_0$ について
$x^2-nb_0x+b_0^2-n$ の解と係数との関係より、
$a_0c_0=b_0^2-n$
$a_0c_0 < b_0^2$
のため、 $a_0>b_0$ より、 $b_0>c_0$ でなければ不等式が成立しない。よって、 $b_0>c_0$

解 (a,b) が存在すると仮定すると、解がいくつがある可能性があるが、 $a>b$ なる解 (a,b) の a が最小となる (a,b) の組を (a_0,b_0) とする。 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=n$ に
$(a,b)=(a_0,b_0)$ を代入すると、
$\frac{a_0^2+b_0^2}{a_0b_0+1}=n$ となり、式変形すると、
$a_0^2+b_0^2-na_0b_0-n=0$
a_0 が方程式の解になるように、 $a_0=x$ とおくと、
$x^2-nb_0x+b_0^2-n=0$
このようになる。 x の解の a_0 でないほうの解を
c_0 とすると、解と係数との関係より、
$a_0+c_0=nb_0$
c_0 について式を変形すると、
$c_0=nb_0-a_0$
このように表せる。このことから、 c_0 は整数であることが分かる。また、不定方程式の対称性より、
(b_0,c_0) も解となる。

あとは、 $b_0>c_0$ かつ、 $c_0>0$ であることを示せば、 (b_0,c_0) の解の存在より、 $(a_0,b_0$ の a_0 が $a_0>b_0$ を満たす解のうち最小であるという仮定に矛盾するため、 $a>b$ のとき、 $a^2+b^2=n(ab+1)$ を満たす (a,b) の組が存在しないことを示せる。

このことから $b_0>c_0$ かつ $c_0>0$ 示すことができれば、 (b_0,c_0) という解の存在により、 a_0 の最小性に矛盾するため、 $a\neq b$ のとき、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ が整数となるような a,b の組は存在しないことが言える。

$c_0 > 0$ について
$c_0 = 0$ と仮定すると、 $a_0c_0 = b_0^2 - n$ から、
$b_0^2 = n$ となり、nが平方数でないという仮定に矛盾する。
$c_0 < 0$ と仮定すると、不定方程式の左辺に
$(a, b) = (c_0, b_0)$ を代入すると、
$c_0^2 - nb_0c_0 + b_0^2 - n$
となり、 $b_0 < 0$ より、 $nb_0c_0 \leq -n < 0$ となるため、
$c_0^2 - nb_0c_0 + b_0^2 - n \geq b_0^2 + n + c_0^2 - n = b_0^2 + c_0^2 > 0$
このことから (b_0, c_0) が解であることに矛盾する。
よって、 $a \neq b$ のとき、不定方程式の解は存在しない。したがって、問題の答えは、 $(a, b) = (1, 1)$ のみであるため、 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ は平方数である。

4. Vieta Jumping から応用できること

Vieta Jumping において重要な手法が２つあげられる。１つは文字の整理、もう１つは最小性に矛盾させることだ。特に、最小性に矛盾させて証明する方法は、難易度の高い問題の定石ともなっているため、問題を解くうえでとても有用的となる。

第7章

誕生日が同じ人がいる確率は何％？

中等部２年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

2020 年度の部誌に、下のようなものがありました。

> **好きな数は？**
>
> 1024
>
> やはり2の累乗は人気ですね．ちなみに今回のアンケートで，数研内には，誕生日が 10 月 24 日の人が3人もいることが分かりました．すごいですねー．数研部員としては，部活内に同じ誕生日の人が3人いるという確率求めたくなります．
>
> 2020 年数研部誌 36 ページより（原文まま）

という訳で、今回は**誕生日に関する様々な確率**について考えていきます。表題にあるように、ここでは主に誕生日が同じ人について考えていきます（なお、この会誌では 1 年は 365 日とします）。

問題 1-1　自分と相手の誕生日が一致する確率を求めなさい。

最初は、相手の誕生日が自分と同じである確率を考えていきます。人の誕生日は 1 月 1 日から 12 月 31 日までの 365 日から 1 日が決まっているため、自分の誕生日は、1 年の日数となるので 365（通り）で、同様に相手の誕生日も 365 通りあります。よって、自分と相手のすべての誕生日の組み合わせは365^2通りとなります。また、自分と相手の誕生日が一致する組み合わせは 365 通りです。

以上より、自分と相手の誕生日が一致する確率は、2 人の誕生日の組み合わせ（365^2通り）に対する、2 人の誕生日が一致する組み合わせ（365 通り）の割合となります。よって、$\frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$となります（約 0.27%）。

これは、2 人でのじゃんけんで 8 連勝する確率（約 0.39%）よりも低い確率です。

問題 1-2　自分と 2 人の相手の誕生日が一致する確率（つまり 3 人で一致）

問題 1 のように考えていきます。自分と 2 人の相手の誕生日はそれぞれ 365 通りで、さらに、自分と 2 人の相手のすべての誕生日の組み合わせは365^3通りです。また、自分と 2 人の相手の誕生日

が一致する組み合わせは 365 通りです。よって、自分と 2 人の相手の誕生日が一致する確率は$\frac{365}{365^3}=\frac{1}{133225}$です(約 0.00075%)。これは、3 人でのじゃんけんで 10 連勝する確率(約 0.0017%)よりも低い確率です。

補足 $n \geqq 2$の場合、n人のうちn人の誕生日が一致する確率$P=\frac{1}{365^{(n-1)}}$

問題 2-1　自分と 2 人の相手のうち、少なくとも 1 人の誕生日が異なる確率

今までは、「n人のうちn人の誕生日が一致する確率」を考えてきました。しかし、今回は「n人のうち、少なくとも一人の誕生日が異なる確率」を考えていくことになります。

ここで、「余事象(よじしょう)」というものを紹介します。余事象とは、「A が起こる」という事象 A に対して「A が起こらない」という事象のことで、この問題の場合、「誕生日が一致する」事象の余事象は「少なくとも 1 人の誕生日が異なる」になります。また、(A が起こる確率) $= 1 -$ (A が起こらない確率)となります。

よって、自分と 2 人の相手のうち少なくとも 1 人の誕生日が異なる確率は、$1-\frac{1}{133225}=\frac{133224}{133225}$です。

さて、今までの 2 つの問題では「n人のうちn人の誕生日が一致する(しない)確率」という形の問題を解いてきました。ここからは、「n人のうち 2 人以上の誕生日が一致する確率」という形の問題を解いていきます。

問題 2-2　40 人のうち 2 人以上の誕生日が一致する確率

この問題の「40 人」というのは、早実の 1 クラスのおおよその生徒の人数です。それではこの問題も余事象を使って考えていきましょう。このとき、2 人以上の誕生日が一致する事象の余事象は 2 人以上の誕生日が一致しない事象ということになります(つまり 365 日から 40 日分の誕生日が選ばれていることになります)。それでは、ここで突然ですがあなたに質問します。40 人のうち 2 人以上の誕生日が一致する確率は何%でしょう?

① 約 10%　　② 約 40%　　③ 約 90%

答えは③の 90%です。①や②だと思った皆さんの中には、「ふざけんな!嘘をつくな!」などと思った方もいることでしょう。それなら、あなたの学年のクラスで誕生日が一致する人がいるかどうか調べてみてください。そうすれば、多くのクラスで誕生日が一致する人が出てくることでしょう。

それではこの問題の解説に入ります。2 人以上の誕生日が一致する事象(B とする)の余事象は、2 人以上の誕生日が一致しない事象(B の余事象)ということになります(つまり 365 日から 40 日分の誕生日が選ばれていることになります)。そのため、B の余事象は 365 個のものから異なる 40 個を取り出して作る「順列」の総数ということになり(n個のものから異なるr個を取り出して作る「順列」の総数を表す式は、${}_nP_r$と表され、${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$です)、総数は${}_{365}P_{40} = \frac{365!}{325!}$(通り)となります(ここでは計算結果が非常に大きい数になると推測されるので計算はしません。また、これは一見分数に見えますが約分すれば整数になります)。また、40 人のすべての誕生日の組み合わせは365^{40}通りなので、2 人以上の誕生日が一致する確率は$\frac{365!}{325!\times 365^{40}}$だと思った皆さん、**それは答えではありません。**$\frac{365!}{325!}$はあくまでも B の余事象なので、答えは 1-B で、$1-\frac{365!}{325!\times 365^{40}}$となり(計算は省略します)約 89.1%となります。

これは、なんと天気予報の的中率(約 87%)よりも高い確率です。

しかし、ここまで来てもまだ計算結果に納得のいかない方もいることでしょう。そんな場合は、ネットなどで「乱数 自動 生成」などと検索してみてください。そして乱数を自動生成するサイトを開き、「1 から 365 までの範囲のうち、40 個の乱数を作る」という設定で乱数を生成してみてください。1 年は 365 日なので、例えば 1 は 1 月 1 日を、34 は 2 月 3 日を、363 は 12 月 29 日を表していると仮定します。それを 40 個生成するということは 40 人分の誕生日を生成していることになります。ちなみに私(筆者)が 30 回試してみたところ、28 回も重複した乱数があったため、約 93%で誕生日が一致すると推測できます（本来は 89.1%なので今回は約 4%の誤差が出たことになります）。

では、最後の問題です。

問題 2-3　40 人のうち 3 人以上の誕生日が一致する確率

この問題は、3 人以上の誕生日が一致する事象(C とする)の余事象は、3 人以上の誕生日が一致しない事象(つまり誕生日が一致しない、または 2 人だけ一致することを指す)ということになり、そのため(C の余事象)＝$\underbrace{(\text{誕生日が一致しない事象})}_{\text{「事象C1」とします}}$＋$\underbrace{(\text{2人だけ一致する事象})}_{\text{「事象C2」とします}}$と表すことができます。

まず、事象 C1 について考えていきましょう。と言いたいところですが、問題 2-2 で既にこの事象について計算がされています。事象 C1 の総数は${}_{365}P_{40}$です。

問題なのは事象 C2 です。これは、40 人のうち 2 人(つまり 1 組)の誕生日が一致する事象だと考えると 365 日から 39 日分の誕生日が選ばれ、そのうち 1 日の誕生日が重複するものと考えて良さそうです。

ということで、早速ですが式を書いてみました(簡単にできる計算もしてあります)。

$$ {}_{365}P_{39} \times {}_{40}C_2 = \frac{365!}{326!} \times \frac{40 \times 39}{1 \times 2} = \frac{365! \times 780}{326!} $$

では、上の式の説明をします。まず${}_{365}P_{39}$は、365 日から 39 日分の誕生日が選ばれる順列の総数で、その次の${}_{40}C_2$は、どの 2 人の誕生日が一致するか、つまり 40 人から 2 人が選ばれる**組合せ**ということになります(n個のものから異なるr個を取り出して作る「組合せ」の総数を表す式は、${}_nC_r$と表され${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$となります)。

しかし、この問題はそれほど単純ではありません。第一、事象 C2 の総数は$\frac{365! \times 780}{326!}$(通り)ではないのです。なぜそうなるのかというと、上では「40 人のうち 2 人(つまり 1 組)の誕生日が一致する事象」が事象 C2 だと書きましたが、それは実は間違いだったのです。実は事象 C2 は、「40 人のうち 2 人(1 組)、4 人(2 組)、6 人(3 組)、…(中略)…、38 人(19 組)、40 人(20 組)の誕生日が一致する事象」となります。お分かりいただけたでしょうか。誕生日が一致する組の数が 1 から 20 までの 20 通りもあるので、それぞれ場合分けして事象 C2 を計算しなければならないのです。

それでは早速、場合分けして計算していきましょう。まず 1 組の誕生日が一致する事象の総数は上でも述べた通り$\frac{365! \times 780}{326!}$になります。次に 2 組が一致する事象の総数は、$40(\text{人}) - 4(\text{人}) + 2(\text{組}) = 38(\text{人,組})$の誕生日の選び方が${}_{365}P_{38}$通りで、40 人のうちの 2 組の選び方の組合せが$\frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2}{2}$となることから、${}_{365}P_{38} \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2}{2}$となります。同様に、3 組が一致する総数は${}_{365}P_{36} \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2 \times {}_{36}C_2}{3!}$で、さらに 4 組は${}_{365}P_{34} \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2 \times {}_{36}C_2 \times {}_{34}C_2}{4!}$、…(略)…、そして 19 組は${}_{365}P_2 \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2 \times \cdots \times {}_4C_2}{19!}$、最後に 20 組は${}_{365}P_0 \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2 \times \cdots \times {}_2C_2}{20!}$となります。あとは、これまでの 20 個の式と事象 C1($= {}_{365}P_{40}$)を足し合わせていけば事象 C の余事象の総数が分かることになります。

では、全ての式を足し合わせていきましょう。ここで、また新たに「総和記号」というものが出てきます。総和記号(Σ)とは、$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$などを繰り返し足し算する式を簡単に書くための記号です。例えば、次のような使い方をします。

$$\sum_{k=1}^{5} 3k = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$$

この記号を使った式は一見難解な計算をしているように見えますが、実際これは便利な記号です。

$$\sum_{k=y}^{n} kx$$

この場合、上の式で変数k（この場合はじめは$k = y$である）を 1 ずつ増やしながら、計算式のkxに当てはめ、変数iがnになるまで足し算すれば良いということになります。

では本題に戻ります。このとき、事象 C の余事象は

${}_{365}P_{40} + {}_{365}P_{39} \times {}_{40}C_2 + {}_{365}P_{38} \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2}{2} \cdots + {}_{365}P_0 \times \frac{{}_{40}C_2 \times {}_{38}C_2 \times \cdots \times {}_{2}C_2}{20!}$で、1 つ上の式に$\begin{cases} k = 0 \\ n = 20 \end{cases}$を代入して、$kx$には$\frac{40!\,{}_{365}P_{40-k}}{2^k(40-2k)!\,k!}$を代入します（参考 $0! = 1$になります）。すると事象 C は下のようになります。

$$\sum_{k=0}^{20} \frac{40!\,{}_{365}P_{40-k}}{2^k(40-2k)!\,k!}$$

上の式の解をaとおきます。そしてこの問題は「1 から事象 C の余事象（3 人以上の誕生日が一致しない）が起こる確率」を求めれば良いので、この問題の解は$1 - \frac{a}{365^{40}}$で求められます。（約 6. 68％）

おわりに

今回皆さんに伝えたかったことは 1 つだけです。集団の中で誕生日が一致する人がいる確率が高いように、世の中には様々な「意外な確率」が隠されていることです。

もちろん、今回出てきた順列や組合せで出てくる式（${}_{n}C_r$、${}_{n}P_r$）、総和記号を知らなかった方はそれを覚えていただいてもいいでしょう。ただ、世の中には、自分の直感とは違うような確率が多く存在するということ、それだけ知っていただければ十分です。

第8章

すうけんアンケート　2022ver.

高等部３年　＊＊＊＊＊＊
高等部３年　＊＊＊＊＊＊

Y）皆さんこんにちは。数学研究同好会部長の＊＊です。
I）部長の手下の＊＊です。
Y）ここではすうけんの実態調査も兼ねて、すうけん部員に配信したアンケートの回答をピックアップしていきます。（実は２年前の部誌で先輩が書いていらっしゃった企画とほぼ同じ、つまりはパクリ企画です。）それではさっそく見ていきましょう！

Q1 好きな科目

回答
・数学
・数学（遊び）
・代数
Y）さすがすうけん。やっぱり数学好きが多いですね。

・古典
・現代文
・日本史
・公民
Y）文系科目が好きって意見も結構多かったです。

・英語以外
Y）英語に対するすごい拒絶を感じる…

Q2 好きな数字

回答
・64　万能だから
・0　かけ算で０に勝てるものはない！、何も無いのが１番
・2　偶数で素数だから綺麗

・22　キリがいいから
Y）みんなそれぞれ理由があっていいですね～。
・821　すきなひとの誕生日だから
I）みんな！特定しちゃおう！
・999983　6 桁最大の素数　スマホのパスワードにしやすいから
Y)誰かのパスワードが流出した瞬間です。

・1729
Y）数学者ラマヌジャンのエピソードで有名な「タクシー数」です。(2 つの正の立方数の和で n 通りに表される最小の数を「n 番目のタクシー数」と言います。1729 は 2 番目のタクシー数です。)
かなりすごい数字ですから他にも理由がありそう（ってか絶対ある）ですが、

長くなるので割愛！

みんな、自分で調べよう！

Q　すうけんの特徴

回答
・ゆるい
・(～￣▽￣)～ゆるい
・とってもゆるーいところ
・ゆるくて楽しい
・ほぼサークル
Y）これぞすうけんの特徴！ってほとんどの部員が思ってると思います。

・雑談部
Y）すうけんは遊び場だからね

・やさしい
・包容力がある
Y）捉え方によっては？やさしいのかな？

・出席率が低い(と数研にあまり参加していない人が言う)
・さぼれる
Y）まあ…ゆるいからね…

Q　すうけんで印象に残っていること

回答

・圧倒的に合宿
・合宿で普段来ていない人がたくさん来たこと　(合宿がすうけんのメインにならないでほしい)
Y) 今年にすうけん史上初めての合宿を開催したためか、印象に残ってる人が多いですね。

・色々なゲームをやったこと
・大富豪研究会
・トランプ
Y) すうけんはボードゲームなどを完備！

・＊＊先生が自分の専門についてお話されたこと。それまで数学は高校程度のものしか知らなかったので、大学ではこういったこともやるというのが、本当に簡単にだけども分かったきになれたので。
・数学講座
Y) ゆるいけどちゃんと勉強してる時もあります。任意だけど。

・消しゴム投げ
・この点はでねぇよ！！
Y) そんなことしてたのか…

・大阪城までのダッシュ！やっぱり数研は運動部なんですね！
Y) そうなんです！すうけんは運動部です！

・先輩が元気に走り回っていたこと(言葉を選ぶのに苦労しました)
Y) う、運動部だから…うん…

Q　次に合宿をやるときに行きたい場所ややりたいこと

回答

・北海道
・北海道　北大に行きたい
・北海道一周(数研は運動部です)
Y) 今年の合宿は暑かったからか、北海道って意見が本当に多かった

・大学の講義はもちろん、高校交流が思ったより楽しかったので、そういったようなことができる場所に行ってみたいです。(抽象的で申し訳すみません)
I）（ここだけの話、すうけんの発表割愛されました、､､）

・マサチューセッツ工科大学
Y）海外を提案してきたのは君だけだよ。

・特にない
Y）任意回答だったのにわざわざそれを言うか…

Q　すうけんはあなたにとってどんな場所ですか？

回答
・ふるさと
・実家
・あっとほーむ
I）アットホームとか言ってるのは大抵ブラックですが、すうけんは本当にアットホームです！みんな入部しましょう。

・半分はベッド、半分は娯楽
Y)すうけんに参加していたら誰が答えたかよくわかる回答ですね。

・ブロッケン現象
Y）お、おう

Q　今やりたいこと

回答
・数学
・べんきょう
・ナブラ演算子ゲーム！　（いろいろな種類の積分を勉強すること）
Y）勉強意欲がある部員が多いですね。素晴らしい。(ちなみに私は全くありません)
・8 時間睡眠に相当する回復を、1 秒ですること。
・寝る
I）お腹空いた

Q　1+1=？

回答

・2

・2！

・1.999999…

Y）全部 2 ですね。まだ正統派。

・ペアノの公理

Y）証明しようとしてる？

・味噌すーぷ□

Y）ネットで有名なネタですね

・1(ブール代数に基づく)

Y）あっ、はい

・2 とは限りません、この世界が 2 進数なら 10 です。

Y）せ、せやな

・これだけでは答えは定まらない。といったような回答をする人がこの同好会には何人かいるだろうことを予想して、敢えて 2

Y）大正解！

Q　こんなすうけんザウルスは嫌だ

Y）大喜利コーナーです

回答

・数学はつまんないというすうけんザウルス

・実は九九が言えない

I）さすがすうけんですね！みんなもすうけんに入ろう！九九ができるようになります！

・すうけんザウルスの着ぐるみの中から＊＊先生が出てくる

I）すうけんザウルスと数学ゴリラ、どっちが強いのでしょうか？

・どんなすうけんザウルスも好き

Y）ありがとう　(T^T)

Q 部誌を読んでくれている人に一言

回答
・最後まで読んでくれてありがとうございます！
・皆さんに楽しんでいただけたら、そしてこの部誌(アンケート)が数学に興味を持つきっかけになれば、幸いです。
・来年も楽しみにしてください(強制ではありません)

・どうぞ、数研に入るように。
・数学をあまり好きでない人も楽しめるような場所です
・素晴らしい提案をしよう。お前もすうけん部員にならないか？
・これ読み終わったら一緒に数学の勉強しような

・やりたいと思ったなら、今すぐやりましょう やり続けることは必ず意義を持つ

終わりに

Y）皆さんいかがだったでしょうか。私自身部誌執筆が初めてだったため、不慣れな部分が多かったのですが、少しでも面白いと感じていただけたら幸いです。
本来もう一人の執筆者は別の人が担当してくれるはずだったのですが、文化祭準備などで忙しいため＊＊くんが代わりに執筆してくれました。頼んだの直前だったのにほんとにありがとう。
I）どうも、＊＊部長の手下の＊＊です。私も部長と同じく最終学年にして初めのそして最後の部誌執筆でありました。よく分からないことを言っていましたらごめんなさい。笑ってくれると助かります。文化祭準備で忙しい中、ほとんどを部長がやってくださり本当に感謝しております。高 3 の文化祭準備は夏休みの初めからしっかりとやりましょう。直前にとっても焦ることになります。ここまで読んでくださりありがとうございました。

おわりに

会誌第７号を読んでいただき、ありがとうございました。今年は式を使った数学の話題だけでなく、合宿体験記や英語での数学、哲学との関係等、様々な内容を掲載しました。バリエーション豊かな会誌になったのではないかと思います。

数研のブースも楽しんでいただけたでしょうか。久しぶりの出展となり、準備にかなり苦労しました…。解法コンテスト、部員とのゲーム対決など、新たな企画も取り入れました。少しでも数学の楽しさを感じていただけたなら幸いです！

2022 すうけんメンバー（氏名は省略）

なんと，40 人の大所帯になりました！！

すうけん